ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1- ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΤΙΜΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ — ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Αν $f(x) = x^2 - x - 6$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(6)$. Σε ποια σημεία τέμνει η συνάρτηση f τον x΄x ;

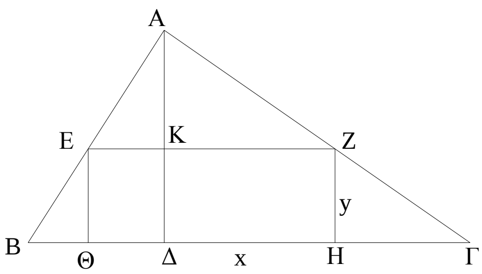
2. Αν $g(\theta) = \frac{1}{\eta\mu\theta} + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}$, να υπολογίσετε τις τιμές $g(\frac{\pi}{3})$, $g(\frac{\pi}{4})$. Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta \in (0, 4\pi)$ είναι $g(\theta) = 0$.

3. Αν $f(x) = e^{2x} - \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}} x$ να υπολογιστούν οι τιμές $f(1)$, $f(\frac{1}{2})$.

4. Αν $f(x) = \frac{\alpha^x}{1+\alpha^x}$ με $0< \alpha \neq 1$ να δείξετε ότι $f(x)+ f(-x) = 1$.

5. Αν $f(x)=\frac{2^x + 2^{-x}}{2}$ και $g(x)=\frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ να λύσετε την εξίσωση $[f(x)]^2+[g(x)]^2=\frac{17}{8}$.

6. Το ορθογώνιο ΕΖΗΘ είναι εγγεγραμμένο στο τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ = 12 και ύψος ΑΔ= 6. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του x.



7. Να εκφράσετε τον όγκο V ενός κύβου ως συνάρτηση του εμβαδού S της ολικής επιφάνειας του.

8. Σύρμα μήκους l κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη x και l – x. Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε ισόπλευρο τρίγωνο και με το δεύτερο σχηματίζουμε κύκλο. Να βρεθεί το άθροισμα των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{2}(5^x + 5^{-x}) , \qquad g(x) = \frac{1}{2}(5^x - 5^{-x}) \text{ και } h(x) = \frac{g(x)}{f(x)} .$$

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$ ισχύουν:

i) $f(-x) = f(x)$ ii) $g(-x) + g(x) = 0$ iii) $f(x) > 0$

iv) $[f(x)]^2 - [g(x)]^2 = 1$ v) $1 - [h(x)]^2 = [f(x)]^{-2}$

10. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα είναι 5cm. Να εκφράσετε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ως συνάρτηση της μιας κάθετης πλευράς του x.

11. Σε απόσταση 3cm από μία κολόνα φωτισμού ύψους 4m βρίσκεται ένας άνθρωπος ύψους h. Να εκφράσετε το μήκος της σκιάς του x σαν συνάρτηση του h.

ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων με τύπο :

i) $f(x) = \dfrac{1-2x}{x^2 - 3x + 2}$ ii) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$ iii) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-2}}{2-\sqrt{x}}$

iv) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - x - 2}{x+1}}$ v) $f(x) = 4\sqrt{x^2 - 2x} + 5\sqrt{x^2 - 3x + 4}$.

2. Ομοίως για τις συναρτήσεις :

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{|2x+1| - 1}}{|x-1|}$ ii) $f(x) = \sqrt{|x-1| - |x-5|}$

iii) $f(x) = \sqrt{|x+1| - 1} - 3\sqrt{|x+2| + 1} + \sqrt{9 - x^2}$.

3. Ομοίως για τις συναρτήσεις :

i) $f(x) = \dfrac{\log(x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 - 4}}$ ii) $f(x) = \sqrt{\log\dfrac{5x - x^2}{5}}$

iii) $f(x) = \log_x(3x - 2)$ v) $f(x) = \log_{x^2-2x+1}(x^2 - 16)$.

4. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x - 8$ για τις διάφορες τιμές του x. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης : $g(x) = \dfrac{1}{2}\log[-(x-4)\cdot(x+2)]$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{25 - x^2}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

ii) Να δείξετε ότι: $f(5\text{συν}x) \le \dfrac{25}{2}$.

6. Να βρεθεί το $\alpha \in R$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - x + \alpha^2 - 2}$ να έχει για πεδίο ορισμού το R.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + \lambda x - 2\lambda}{x^2 - 2\lambda x + \lambda + 2}$, $\lambda \in R$. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου λ αν είναι γνωστό ότι η f έχει πεδίο ορισμού το R.

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1. Αν $f(x) = 2x - 3$ και $g(x) = x^2 - 4x + 3$ να βρείτε τις συναρτήσεις : $f(x) + g(x)$, $f(x) + (x+1)g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $[f(x)]^2 - g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{6}{x-1}$ και $g(x) = \dfrac{8x}{x^2-4}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $f+g$, $f\cdot g$, $5\cdot f$, $\dfrac{f}{g}$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{x+2}{x-3}$ και $g(x) = \dfrac{x+1}{(x-2)\cdot(x-1)}$. Να οριστούν οι συναρτήσεις $f + g$, $f\cdot g$, $f - g$, $\dfrac{g}{f}$.

4. Αν $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = |x| - 2$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x) + g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

5. Αν $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \dfrac{x^2-9}{x-2}$, να βρεθούν οι συναρτήσεις $f - g$, $\dfrac{f}{g}$, $\dfrac{g}{f}$.

ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x \to -1} \left(-2x^4 + x^3 - x + 1\right)$ ii) $\lim\limits_{x \to 2} \left(x^3 - 2x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$

iii) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^4 - x}{3 + x^2}$ iv) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 5x + 2}{|x| - 2}$

v) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu x\right)$ vi) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} (3\,\eta\mu x + 4\,\sigma\upsilon\nu x)$

2. Αν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 2$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$ όταν :

1. $g(x) = 2f(x) - 1$ 2. $g(x) = \dfrac{4f(x)}{f^2(x) - 1}$

3. $g(x) = \left|(f(x)-1)\cdot(f(x)+2)\right|$ 4. $g(x) = \sqrt[3]{3f(x)+2}$.

3. Να υπολογιστούν τα όρια :

1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4-1}$

4. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{3x^2+4x-4}{x^2+6x+8}$ 5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^3+4x^2}{4x^4-3x^2}$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x + x\eta\mu x + \alpha^2 x}{x}$ 7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\eta\mu x - \sqrt{x^2+x^4}}{x^2-x}$

4. Να υπολογιστούν τα όρια :

1. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ 3. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x+3}-2}$ 5. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{5+x}-3}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x-3}}$

5. Αν $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x) - x^2 + x + 1\right) = 2$ να αποδειχθεί ότι: $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3$.

6. Αν μ, ν∈N* και α, β, γ∈ R με α+β+γ = 0, να αποδείξετε ότι :

$$\lim_{x\to 1} \frac{\alpha x^{\nu} + \beta x^{\mu} + \gamma}{x-1} = \nu\alpha + \mu\beta$$

7. Να αποδείξετε ότι:

1. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{2x-10}{5-\sqrt{5x}} = -4$ 2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-\sqrt{x-1}}{x^2-4} = \dfrac{-1}{8}$

3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x^3-5x^2-8x-1}{x^4+x^3-x-1} = -4$ 4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+\alpha^2}-\alpha}{\sqrt{x^2+\beta^2}-\beta} = \dfrac{\beta}{\alpha}$ $(\alpha,\beta>0)$

5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{e^x} = 0$ 6. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\varepsilon\varphi x}{\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{2}{3}$

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)^2+x^2-1}{x^3-1} = \dfrac{2}{3}$ 8. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\left|x^2-5\right|}{\eta\mu\left(\dfrac{3\pi}{x}\right)} = -1$

8. Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια:

1. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-2x^2+4x^2-6x+3}{x^2-3x+2}$ 2. $\lim\limits_{x\to \lambda} \dfrac{x^2-3\lambda x+2\lambda^2}{x-\lambda}$

3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x^3-3x^2+2}$ 4. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}-2-\sqrt{3}}{x-3}$ 6. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x^2+5}-5}{x-2}$

9. Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου $\lambda\in R$, αν ισχύει:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\left(\lambda^2+4\right)x^2-16x+12-9\lambda^2}{x-3} = 5\lambda^2+9.$$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2-\alpha x+\beta}{x-3}$, $\alpha,\beta\in R$ με $9-3\alpha+\beta=0$. Αν $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 0$,να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων α,β.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να μελετήσετε ως προς την συνέχεια στο x_0 τις συναρτήσεις :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & x \neq 1 \\ 1/2 & x = 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-4x} & 0< x \neq 4 \\ 1 & x = 4 \end{cases}$ $\quad x_0 = 4$.

2. Βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο x_0 :

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & x \neq 1 \\ \alpha & x = 1 \end{cases}$ $\quad x_0 = 1$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+8}{x^2-4} & x \neq -2 \\ \alpha & x = -2 \end{cases}$ $\quad x_0 = -2$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x + 3 & x \neq 1 \\ -2 & x = 1 \end{cases}$. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 1$ και η C_f διέρχεται από το σημείο Α(-1, 2), να προσδιοριστούν τα α και $\beta \in R$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις :

$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2+\beta x + 1, & x \neq 1 \\ 3 & , x = 1 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha x-\beta}{x+2}, & x \neq 2 \\ 4 & , x = 2 \end{cases}$

α) Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η g να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

β) Να βρείτε το όριο : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - (x+2) \cdot g(x) + 7}{x^2 - 1}$.

5. Αν συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και $f^2(1) = 4\lim\limits_{x\to 1} f(x) - 4$ να βρεθεί το f(1).

$\dfrac{\alpha x + \beta - 2}{x - 1} \quad x \neq 1$

6. Έστω $f(x) =$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta \in R$ ώστε η f να είναι

$$2\alpha-1 \qquad x=1$$

συνεχής στο $x = 1$ και να ισχύει η σχέση $\alpha + \beta - 2 = 0$.

7. Έστω $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3\lambda x + 2\lambda^2}{x - \lambda} & x \neq \lambda \\ \lambda & x = \lambda \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του λ, αν είναι γνωστό ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = \lambda$.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης :

i) $f(x) = \sqrt{x}$ στο $x_0 = 4$

ii) $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ στο $x_0 = 1$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ στο $x_0 = -1$

iv) $f(x) = x^4 + 1$ στο $x_0 = -1$

v) $f(x) = 2x^2 + 4x$ στο $x_0 = 2$.

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης :

i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ στο $x_0 = 8$

ii) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2+1}$ στο $x_0 = -1$.

3. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R, για την οποία ισχύει

$$f(2 + h) = 3h^2 + 2h - 1 \text{ για κάθε } h \in R$$

i) Να βρεθεί η τιμή f(2)

ii) Να υπολογιστεί η παράγωγος $f'(2)$.

4. Μια επιχείρηση έχει κέρδη t^2 σε εκατομμύρια δραχμές στα πρώτα t έτη της λειτουργίας της.

i) Ποιος ο μέσος ρυθμός μεταβολής του κέρδους από $t= 2$ σε $t= 2,5$ χρόνια .

ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους για $t = 2$.

5. Ένας κύβος έχει ακμή x που μεταβάλλεται.

i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού επιφάνειας ως προς την ακμή του, όταν $x = 3$.

ii) Να βρείτε το μήκος της ακμής του, όταν ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού επιφάνειας του κύβου είναι 6 .

6. i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού ενός ορθογωνίου με πλευρές $x+2$ και $2x$ ως προς x όταν $x=3$.

ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ύψους $x + 1$ με βάση το ορθογώνιο του προηγούμενου ερωτήματος ως προς x όταν $x = 2$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης :

i) $f(x) = x^3$ στο $A(0, f(0))$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ στο $A(1, f(1))$

iii) $f(x) = x^2 + 3x$ στο $A(-1, f(-1))$.

8. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο R, παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ με $f(1) = 5$ και $f'(1) = 3$. Να υπολογίσετε το: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f^2(1+h)-25}{h}$.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗΣ

1. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

1. $f(x) = 2x^{-4}$ 2. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 3. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ 4. $f(x) = 2x^2\cdot\sqrt[3]{x}$

5. $f(x) = \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2+x+7$ 6. $f(x) = \dfrac{x^2+9}{5}$ 7. $f(x) = x^2 + \text{συν}x - 2$.

2. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

1. $f(x) = x^2\cdot\text{ημ}x$ 2. $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$ 3. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+2}$

4. $f(x) = 2x - 3\sqrt{x}\cdot\text{συν}x$ 5. $f(x) = x\cdot e^x\cdot\ln x$ 6. $f(x) = \dfrac{x\cdot\ln x}{x^2 - 1}$

7. $f(x) = \dfrac{2x+1}{e^x}$ 8. $f(x) = 3\text{ημ}x\cdot\text{συν}x - \text{εφ}x$.

3. Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

1. $f(x) = (2x+5)^4$ 2. $f(x) = -\dfrac{3}{(4-x^2)^5}$ 3. $f(x) = \text{συν}^5x$ 4. $f(x) = \text{συν}x^5$

5. $f(x) = 2ημ^3(x^2+4)$ 6. $f(x) = 5ημ(2x^2+1)^3$ 7. $f(x) = \sqrt{3x^2-12}$

8. $f(x) = \sqrt{1-συν2x}$ 9. $f(x) = \frac{1}{3}\ln 3x$ 10. $f(x) = \ln\frac{2}{x^5}$ 11. $f(x) = \ln\frac{εφx}{x^2+1}$

12. $f(x) = \log_2(x^3+5)$ 13. $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$ 14. $f(x) = συν^2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

15. $f(x) = \frac{\ln x-2}{\ln^2 x}$ 16. $f(x) = e^{\ln(x^2+1)}$ 17. $f(x) = e^{\sqrt{x}+x^2}$ 18. $f(x) = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

4. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

1. $f(x) = e^{\sqrt{x}} - \ln(2x-1)$ 2. $f(x) = -\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ 3. $f(x) = 10\sqrt{x} - 20\ln(2+\sqrt{x})$

4. $f(x) = \ln^2 x - \ln(\ln x)$ 5. $f(x) = \ln(συν\sqrt{x^2+α^2})$ 6. $f(x) = \log(εφx)$.

5. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

1. $f(x) = ημ(συν(x^2+x))$ 2. $f(x) = συν^3(2x^2+3x+4)^4$ 3. $f(x) = ημ(συν^2(x^2-x))$

4. $f(x) = \ln(\ln(x^2+3x))$ 5. $f(x) = \ln(ημ(συνx^2))$ 6. $f(x) = \ln\sqrt[3]{(x^2-3x+1)^2}$

7. $f(x) = ημ(\ln(συν^2(x+1)))$ 8. $f(x) = e^{ημ(2x+1)^2}$.

6. Να βρεθούν οι παράγωγοι των συναρτήσεων :

1. $f(x) = x^x$ 2. $f(x) = x^{ημx}$ 3. $f(x) = x^{\ln x}$ 4. $f(x) = (συνx)^{\ln x}$

5. $f(x) = 2^{συνx}$ 6. $f(x) = 3^{συνx+\ln x}$.

7. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων :

i) $y = \ln(3x^2-1)$ ii) $y = e^{\sqrt{x}}$ iii) $y = ημ^3 2x$

iv) $y = \frac{x^2+3}{x+2}$ v) $y = x^3e^{-x}$ vi) $y = \ln(x^2+2)$.

8. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $y = e^x ημx$ επαληθεύει την σχέση :

$$y''-2y'+2y=0 \ .$$

9. Αν $f(x) = x\cdot e^{-\frac{1}{x}}$ να δείξετε ότι : $x^3f''(x) - xf'(x) + f(x) = 0$.

10. Αν $f(x) = α\cdot e^{-x} + β\cdot e^{-2x}$ $(α, β \in R)$ να δείξετε ότι : $f''(x)+3f'(x)+2f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

11. Έστω συνάρτηση $f:(0, \frac{π}{2}) \to R$ με τύπο $y=α\cdot συνx-2συν^2x$. Να δειχθεί ότι $y'+y\cdot εφx = ημ2x$.

12. Θεωρούμε την συνάρτηση $\sigma(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ με $g(x) \neq 0$. Αν $\sigma'(\alpha) = 0$ για κάθε $\alpha \in A$, να δειχθεί ότι: $\sigma(\alpha) = \frac{f'(\alpha)}{g'(\alpha)}$. (f, g παραγωγίσιμες και $g'(\alpha) \neq 0$) .

13. Αν $f(x) = g(x)+h(x)$ και $g'(x) = -h(x)$, $h'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$ να δείξετε ότι: $f''(x)+f'(x) = 0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x}$.

i) Να δείξετε ότι $f'(x)+f^2(x) = -1$
ii) Αν $f''(x) = 0$ να δείξετε ότι $f(x) = 0$.

15. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln 3x$. Να βρείτε τις παραγώγους $f'(2x)$ και $(f(2x))'$. Τι παρατηρείτε ;

16. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο διάστημα Δ. Αν για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει: $5f^2(x) = 2g^3(x) - 48$ και $f(2) = 4$, $f'(2) = 1$, να βρείτε τα $g(2)$, $g'(2)$ $(2 \in \Delta)$.

17. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $f(x^2 - 2x + 4)$ β) $f(\sigma\upsilon\nu x) + \sigma\upsilon\nu(f(x))$
γ) $[f(\ln x)]^2$ δ) $f(e^{\sigma\upsilon\nu x} - 2)$

18. Αν $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1 + \eta\mu^2 x}$, $x \in R$ να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{3} f(\frac{\pi}{4}) = 1 + f'(\frac{\pi}{4})$.

19. Να βρεθεί το πολυώνυμο P(x) τρίτου βαθμού για το οποίο ισχύει:
$P(0) = 1$ $P'(-1) = -5$ $P'(-2) = 5$ και $P''(-1) = -6$.

20. Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει:
$f(\ln x) = 3e^{x-1} + \ln^2 x$ για κάθε $x > 0$. Να υπολογίσετε το $f''(0)$.

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$, $x \in R$. Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων $\alpha, \beta \in R$ ώστε να ισχύει: $\alpha f''(x) + \beta f'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in R$.

22. Δίνονται οι συναρτήσεις f,g παραγωγίσιμες στο R, για τις οποίες ισχύει:
$f(g(x)) = (x^2 - 3x)^6$, $x \in R$. Αν $g(1) = 2006$ και $g'(1) = 32$ να υπολογίσετε το $f'(2006)$.

23. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν παραγωγίσιμες στο R συναρτήσεις f,g που η γραφική τους παράσταση διέρχεται από την αρχή των αξόνων και για τις οποίες ισχύει:
$f(x)g(x) = 3\ln(x^2 + 1) - e^x + 1$, για κάθε $x \in R$.

24. Αν $f(x) = \sqrt{x} + 1$ να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h^2+2h}.$$

25. Αν $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ $x > 1$ να δείξετε ότι:

$$(x^2-1)f''(x)+xf'(x)=f(x).$$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

1. Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(t) = \dfrac{e^t+1}{e^t+2}$ στο σημείο Α(0, f(0)). Ομοίως της καμπύλης $f(\theta)=\dfrac{\eta\mu\theta}{2-\sigma\upsilon\nu\theta}$ στο σημείο Α(π, f(π)) .

2. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{1}{4}(\alpha x - x^3)$ στο σημείο της Ο(0, f(0)) να σχηματίζει με τον άξονα xx΄ γωνία 45° .

3. Να βρεθεί η Ε.Ε στο $x_0 = 2$ του διαγράμματος της $f(x) = x^3 - x$.

4. Να βρεθούν οι Ε.Ε της καμπύλης $f(x) = x^2-x-6$ στα σημεία που αυτή τέμνει τους άξονες .

5. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του διαγράμματος της συνάρτησης $f(x) = x^4-3x$ στο σημείο $A(x_0, y_0)$, αν η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον οριζόντιο άξονα .

6. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης C της f με $f(x)= 2x^3-3x^2-12x+5$ που είναι παράλληλες στον xx΄ .

7. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ που σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{3}$ με τον άξονα xx΄.

8. Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f με $f(x) = x^2+\alpha x+1$ και g με $g(x) =2x^2+x+\beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g, με: $f(x) = \alpha x^2-4x+\beta$ και $g(x) = \dfrac{\beta x}{x - 1}$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta\in R$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f και g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 2$.

10. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της f με $f(x) = x^2-5x+6$ που περνούν από το σημείο $M(1, -2)$.

11. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων της συνάρτησης $f(x) = 2x^2+2$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων .

12. Να βρεθεί το α ώστε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x$ να έχει στο σημείο $x_0 = 1$ εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $y - 2x + 3 = 0$. Επίσης να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης .

13. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f με $f(x)=2x^2+3x-1$ που είναι κάθετη στην ευθεία $x-y-2=0$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με τύπο $f(x) = x^2+ \kappa x + \lambda$. Να βρεθούν οι $\kappa, \lambda \in R$ έτσι ώστε η ευθεία $y=3x$ να εφάπτεται στο διάγραμμα της συνάρτησης στο σημείο $M(1, 3)$.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^2-2x+9$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η ευθεία $y = \beta x$ να εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(3,f(3))$.

16. Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \alpha x^2+\beta x+7$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(2, 9)$ να διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$.

17. Δίνονται οι συναρτήσεις f, με $f(x) = \ln x$, και g με $g(x) = \ln^2 x - \ln x + 1$.Να αποδείξετε ότι οι γραφικές τους παραστάσεις έχουν ένα κοινό σημείο, και στο σημείο αυτό έχουν την ίδια εφαπτομένη .

18. Δίνεται η συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x και η συνάρτηση g με $g(x) = 2004\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ για κάθε πραγματικό αριθμό x. Αν υποθέσουμε ότι υπάρχει $x_0 \in R$ για το οποίο ισχύει $f''(x_0) = 0$, να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο $(x_0,g(x_0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία ε : $\dfrac{y}{4} - 501x = 1$.

19. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to R$ με $f(x^2 + 4x) = x^3 + \ln x$. Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $A(5,f(5))$.

20. Αν η συνάρτηση t είναι παραγωγίσιμη στο R και η ευθεία (ε) : $y = -x + 5$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της t στο $x_0 = 2$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της $\kappa(x) = x^2 t(2x - 3)$ στο $x_1 = 5/2$.

21. Η εφαπτομένη της καμπύλης $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ στο τυχαίο σημείο της P τέμνει τον xx΄ στο T. Αν P΄ είναι η ορθή προβολή του P πάνω στον άξονα xx΄ να αποδειχθεί ότι το μήκος του P΄ T είναι σταθερό.

22. Να βρεθεί ο $\lambda \in R$, έτσι ώστε η $f(x) = \frac{x^3}{3} + \lambda x^2 - (\lambda^2 - \lambda)x$ να μη δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

23. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: (2, +\infty) \to R$ με $f(x) = \ln(x-2)$ και $g: R \to R$ με $g(x) = x^2 + 3x - 2$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Α(3,0) εφάπτεται της C_g.

24. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $f(x) = 2x^3$ στο τυχαίο σημείο της $M(\alpha, 2\alpha^3)$ με $\alpha \neq 0$ έχει πάντα και άλλο κοινό σημείο Ν με την καμπύλη. Να δείξετε ότι η κλίση στο Ν είναι τετραπλάσια της κλίσης στο Μ.

25. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $y = f(x)$ στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$, όταν :

α) $f(x) \cdot e^{f(x)} = e^{x+1}$, $x_0 = 0$ και $f(0) = 1$.

β) $[f(x)]^2 = x + \ln\frac{f(x)}{x}$, $x_0 = 1$ και $f(1) = 1$

26. Αν η f δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$, $x \in R$, $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$ και η C_g τέμνει τον άξονα xx΄ στο σημείο $A(x_0, 0)$ να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο Α είναι κάθετη στην ευθεία : $2002x + 2002y = 2003$.

27. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^3+\alpha}{2x+\alpha}$ στο σημείο Α(-1, f(-1)) να είναι παράλληλη προς τον άξονα xx΄ .

ΡΥΘΜΟΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

1. Το ποσοστό των σπόρων ενός δέντρου που εξαπλώνονται σε απόσταση από τη βάση του μεγαλύτερη από r δίνεται από την συνάρτηση : $\rho(r) = \frac{3}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{1/2} + \frac{1}{4}\left(\frac{r_0}{r}\right)$ όπου r_0 μια σταθερά. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του ποσοστού εξάπλωσης των σπόρων όταν $r = 2r_0$.

2. Η ακτίνα r(cm) ενός σφαιρικού μπαλονιού μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου t(sec) και δίνεται από τον τύπο $r(t) = 10e^{-t}$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας του μπαλονιού κατά την χρονική στιγμή t = 2sec . ($E = 4\pi\rho^2$ και $V = \frac{4}{3}\pi\rho^3$) .

3. Χρωματιστό υγρό πέφτει σε ρούχο και απλώνεται σχηματίζοντας κυκλική κηλίδα της οποίας το εμβαδόν αυξάνει με ρυθμό μεταβολής $5cm^2/min$. Να βρεθεί

ο ρυθμός μεταβολής της ακτίνας κατά τη χρονική στιγμή κατά την οποία το εμβαδόν της κηλίδας είναι $36\pi\ cm^2$.

4. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει και η ακτίνα της ελαττώνεται σύμφωνα με τον τύπο $R = 9 - 4t$, όπου t ο χρόνος σε sec και $0 \le t \le \frac{9}{4}$. Να βρείτε το ρυθμό μείωσης του όγκου και της επιφάνειας της μπάλας όταν t = 1sec .

5. Από ένα σφαιρικό μπαλόνι διαφεύγει αέριο με ρυθμό $3cm^3/sec$. Να βρείτε τον ρυθμό μείωσης της επιφάνειας του μπαλονιού όταν η ακτίνα του είναι 20 cm.

6. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους P σε χιλιάδες δραχμές ανά αντικείμενο όταν το εβδομαδιαίο κόστος παραγωγής είναι : $\kappa(x) = 40+5x+\frac{1}{4}x^2$ και η είσπραξη $E(x) = 60x- x^2$ στην περίπτωση που πωλούνται α) 20 αντικείμενα την βδομάδα, β) 30 αντικείμενα την βδομάδα .

7. Οι διαστάσεις x και y ενός ορθογωνίου αυξάνουν με ρυθμό 2cm/sec και 4cm/sec αντίστοιχα. Να βρείτε το ρυθμό αύξησης του εμβαδού του ορθογωνίου ως προς τον χρόνο t κατά την χρονική στιγμή t_0 που είναι x = 25cm και y = 32cm.

8. Δίνεται ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10m του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με ταχύτητα υ = 2m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από την συνάρτηση $S(t) = \upsilon \cdot t$, $t \in [0, 5]$ όπου t ο χρόνος σε sec.

i) Να βρεθεί το εμβαδόν E(t) του τριγώνου (OAB) ως συνάρτηση του t.
ii) Ποιος ο ρυθμός μεταβολής του E(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του OA είναι 6m ;

9. Ένα κινητό σε χρόνο t sec διανύει διάστημα S σε m που δίνεται από τον τύπο $S(t) = t^3+t^2+t+1$, $0 \le t \le 5$. Να βρείτε :

i) την αρχική ταχύτητα του κινητού
ii) τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του γίνεται 6 m/sec
iii) τη χρονική στιγμή που η επιτάχυνσή του γίνεται $26\ m/sec^2$.

10. Η θέση ενός υλικού σημείου που βάλλεται, με φόρα προς τα πάνω, από το έδαφος δίνεται από τον τύπο $y(t) = 5t(20-t)$, όπου t ο χρόνος της κίνησης σε sec.

i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου όταν t = 11sec. Τι συμπεραίνετε για την κίνηση του τη στιγμή αυτή;
ii) Να βρείτε την αρχική ταχύτητα του σημείου και το μέγιστο ύψος στο οποίο φθάνει.
iii) Σε ποια χρονική στιγμή το ύψος του είναι 375m .

11. Ένα σώμα κινείται ευθύγραμμα και η θέση του (σε m) συναρτήσει του χρόνου (σε sec) δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \frac{2}{3}t^3 + \alpha t^2 + \beta t$ $\alpha,\beta \in R$.

i) Αν τη χρονική στιγμή $t = 3sec$, το σώμα έχει διανύσει 6m και η ταχύτητά του στιγμιαία είναι 8 m/sec, να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α,β.

ii) Για τις πιο πάνω τιμές των α,β να βρεθεί πότε το σώμα είναι στιγμιαία ακίνητο.

iii) Πότε το σώμα έχει επιβράδυνση 2 m/sec^2.

12. Ένα μόριο σκόνης κινείται κατά μήκος του άξονα xx΄. Η θέση του κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 + 2t^2 – 4t +1$.

1. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνσή του ως συνάρτηση του χρόνου.
2. Ποια είναι η ταχύτητα του μορίου σε χρόνο 1sec;
3. Πότε το μόριο είναι στιγμιαία ακίνητο;
4. Πότε το μόριο κινείται στην θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική;
5. Πότε το μόριο κάνει επιβραδυνόμενη και πότε επιταχυνόμενη κίνηση;
6. Ποιο είναι το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το μόριο στη διάρκεια των πρώτων 2sec;
7. Ποια είναι η μετατόπιση του μορίου στη διάρκεια των πρώτων 2sec;

13. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t) = 3t^2 + 9t$ και $y(t) = 6t + 18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

14. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) με κάθετες πλευρές ΑΒ = 3cm και ΑΓ = 4cm. Αν η πλευρά ΑΒ αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec, ενώ η πλευρά ΑΓ ελαττώνεται με ρυθμό 0,5cm/sec να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής μετά από 3sec: α) του εμβαδού του τριγώνου και β) της υποτείνουσας ΒΓ.

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = x^2 + 4x$ ii) $f(x) = 2 - x^2$ iii) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}\,x – 1$

iv) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + \frac{3}{4}$ v) $f(x) = -x^3 + 12x + 13$.

2. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ ii) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

iii) $f(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x + 1$ iv) $f(x) = (x^2 - 1)^3$.

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των συναρτήσεων :

i) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ii) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x}$ iii) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

iv) $f(x) = x - e^x$ v) $f(x) = \frac{x}{e^x}$ vi) $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

4. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα :

i) $f(x) = \alpha x^3 \quad \alpha \neq 0$ ii) $f(x) = -x^3 - 6x + 7$ iii) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 16$

iv) $f(x) = - x^3 + \alpha x^2 + (\alpha - 6)x + 4$ και $0 < \alpha < 3$.

5. Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία στο διάστημα $[0, \frac{\pi}{2}]$ με τύπο $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}$. Αν $\alpha, \beta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ και $\alpha > \beta$ τότε να δείξετε : $\frac{\eta\mu^2\alpha}{\eta\mu^2\beta} > \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\beta}$.

6. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 + \frac{2\alpha}{x} + \beta$ $(\alpha, \beta \in R)$ η οποία μηδενίζεται στο $x_1 = 1$ και παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$.

i) Να βρεθούν τα α και β .

ii) Να βρεθεί το είδος του ακρότατου και η τιμή του .

7. Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 12x$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 2$. Να καθορίσετε το είδος των ακρότατων .

8. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln^2 x + \alpha \ln x + \beta x$, $\alpha, \beta \in R$. Να βρείτε τα α, β ώστε η f να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = e$ και $f''(e^3) = 0$.

9. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 + 1}$ $\alpha, \beta \in R$. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε η f να παρουσιάζει στο $x_0 = 2$ ακρότατο με τιμή -1.

10. Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2 + 2x$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in R$ ώστε η f να παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 = 1$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο (2, f(2)) να είναι κάθετη στη ευθεία $8y - x + 9 = 0$.

11. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f^2(x) + f(x) = x^3 + 2x$ να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα .

12. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: R \to R$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = 1$ και ισχύει $f(1) = -6$. Θεωρούμε συνάρτηση g με $g(x) = \frac{f(x)}{x^2+1}$. Να αποδείξετε ότι $g'(1) = 3$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f: R \to R$ με $f(x) = x^{11} + x^3 + x$.

α) Να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία

β) Να αποδείξετε ότι : $f(\pi^2 + e^2) > f(2\pi e)$.

14. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = x^2 - 2\alpha x + 5\alpha$, $\alpha \in R$. Να βρείτε το α ώστε το ελάχιστο της συνάρτησης f να παίρνει τη μέγιστη τιμή .

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^2+(2-\lambda)x - \frac{3}{4}\lambda - 1$, $\lambda > 0$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα
β. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το ελάχιστο της f να είναι μέγιστο.

16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατά της.
γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει:

$$x^2 \geq 1 + 2\ln x.$$

17. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^{11} + 8x - 8$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
ii) Να λύσετε την ανισότητα $f(f(x)) < 1$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + \lambda$, $\lambda \in R$. Αν x_1, x_2 είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της f να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ είναι σταθερή.

19. Να βρεθεί το σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 3$ στο οποίο η εφαπτομένη έχει το μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης.

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2\alpha x^2 + 3\alpha x + 1$, $\alpha, x \in R$. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου α, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο τυχαίο σημείο $(x,f(x))$ να παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 6$.

21. Δίνεται η συνάτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + 2f(x) = x^{2007} + 3x \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ΜΕΓΙΣΤΑ – ΕΛΑΧΙΣΤΑ

1. Το γινόμενο δύο θετικών αριθμών είναι 16. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει το άθροισμά τους .

2. Από όλα τα ορθογώνια που κατασκευάζουμε με σύρμα μήκους 40 m ποίο είναι αυτό που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ;

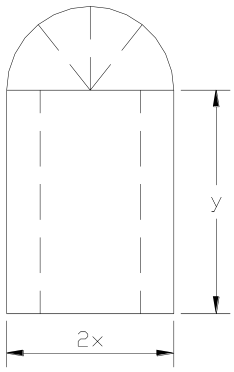
3. Από όλα τα ισοσκελή τρίγωνα με περίμετρο 18cm ποιο είναι εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν ;

4. Δίνεται η συνάρτηση $y = \sqrt{5 - x^2}$. Να βρείτε το σημείο της που είναι πλησιέστερο στο σημείο $A(3, 6)$.

5. Να βρείτε το $\lambda \in R$ ώστε το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της εξίσωσης $3x^2+(\lambda-6)x-\lambda= 0$ να είναι ελάχιστο και να βρεθεί .

6. Να βρείτε ο $\lambda \in R$ ώστε η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)=(\lambda-1)x^2-\lambda(x-1)^2$ να γίνεται ελάχιστη .

7. Από φύλλο λαμαρίνας που έχει σχήμα τετραγώνου με πλευρά 2,4 m θέλουμε να κατασκευάσουμε ανοιχτό δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, κόβοντας από τις 4 γωνίες του ίσα τετράγωνα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε την πλευρά x του τετραγώνου ώστε το δοχείο που θα κατασκευάσουμε να έχει τη μέγιστη χωρητικότητα .

8. 

Ένα παράθυρο αποτελείτε από ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και από ένα ημικύκλιο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η περίμετρος είναι 4+π μέτρα πως πρέπει να κατασκευάσουμε το παράθυρο για να έχουμε το μεγαλύτερο δυνατό φωτισμό .

9. Ένα φορτηγό μεταφορών έχει να μεταφέρει εμπορεύματα σε απόσταση 600km με σταθερή ταχύτητα x km/h. Σε αυτή τη διαδρομή το μέγιστο επιτρεπόμενο όριο ταχύτητας είναι 90 km/h. Τα καύσιμα στοιχίζουν 0,5€ το λίτρο και η κατανάλωση ανά ώρα είναι $4+\frac{x^2+x}{300}$ λίτρα. Αν η αμοιβή του οδηγού του φορτηγού είναι 10€ την ώρα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της διαδρομής δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{7200}{x} + x + 1$.

β) Βρείτε το πεδίο ορισμού της K(x).

γ) Βρείτε την ταχύτητα του φορτηγού για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

10. Μια εταιρία κατασκευάζει ένα set αξεσουάρ αυτοκινήτου που το πουλά στην ίδια συσκευασία. Αν το ημερήσιο κόστος x sets δίνεται από τον τύπο $\frac{1}{4}x^2 + 35x + 25$ σε εκατοντάδες ευρώ και τιμή πώλησης κάθε set είναι $50 - \frac{1}{2}x$ εκατοντάδες ευρώ τότε:

α) Να υπολογίσεις ποια πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή, ώστε η εταιρία να έχει το μέγιστο δυνατό κέρδος. Ποιο είναι αυτό;

β) Να αποδείξεις ότι το κόστος παραγωγής ενός τέτοιου set παρουσιάζει ελάχιστο.

11. Το πλήθος σε δεκάδες χιλιάδες κομμάτια των πωλήσεων μιας εταιρίας που παράγει ηλεκτρονικούς υπολογιστές, δίνεται από τη συνάρτηση $P(t) = \frac{400t}{t^2 + 25}$, όπου το t εκφράζει σε μήνες το χρόνο κυκλοφορίας ενός νέου μοντέλου.

α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων της εταιρίας μετά από ένα μήνα, από την κυκλοφορία στην αγορά ενός νέου μοντέλου.

β) Να βρεθεί η χρονική στιγμή (μήνας) κατά την οποία οι πωλήσεις παίρνουν τη μέγιστη τιμή.

γ) Να βρεθεί η μέγιστη ποσότητα σε εκατοντάδες χιλιάδες κομμάτια που πουλά η εταιρία το μήνα που βρέθηκε στο ερώτημα β.

12. Το κόστος παραγωγής της μιας μονάδας ενός προϊόντος, όταν παράγονται x μονάδες, δίνεται από τον τύπο: $K(x) = \frac{100}{x} - 5x + 40$. Η τιμή πώλησης της μιας μονάδος πρέπει να είναι 40% μεγαλύτερη από την τιμή κόστους.

i) Να βρεθεί η συνάρτηση των εσόδων από την πώληση x μονάδων.

ii) Να βρεθεί σε πόσες μονάδες έχουμε μεγιστοποίηση των κερδών.

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Μ(3,4) και σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες τρίγωνο ελαχίστου εμβαδού.

14. Μία επιχείρηση έχει παρατηρήσει ότι για ένα ορισμένο προϊόν το συνολικό κόστος (σε εκατοντάδες ευρώ) δίνεται από τη συνάρτηση $K(x) = 2x^3 – 6x^2 + 20x$, όπου x οι μονάδες παραγωγής σε χιλιάδες.

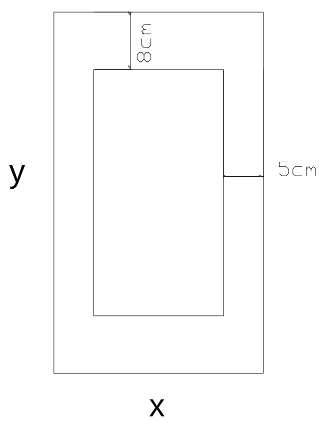
α) Το μέσο κόστος παραγωγής μιας μονάδας προϊόντος δίνεται από τον τύπο $K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}$. Ποια είναι η παραγωγή x, που ελαχιστοποιεί το μέσο κόστος.

β) Το οριακό κόστος είναι $K_{ορ}(x) = K΄(x)$. Αποδείξτε ότι για κάθε x του ερωτήματος α) είναι $K_{ορ}(x) = K_\mu(x)$.

γ) Πώς μεταβάλλεται το K_μ συναρτήσει του $K_{ορ}$;

δ) Πώς συμπεριφέρονται οι συναρτήσεις K_μ, $K_{ορ}$ αν στο συνολικό κόστος προστεθεί ένα «σταθερό κόστος» $A(x) = λx$, όπου λ σταθερά;

15. Ένας υποψήφιος στις προηγούμενες δημοτικές εκλογές ήθελε να φτιάξει μια αφίσα χρησιμοποιώντας χαρτί σε σχήμα ορθογωνίου εμβαδού 1m². Για κατασκευαστικούς λόγους έπρεπε να αφήσει πάνω και κάτω περιθώρια 8cm, ενώ δεξιά και αριστερά περιθώρια 5cm. Ζήτησε από τον τυπογράφο του να του υπολογίσει τις διαστάσεις x, y του χαρτιού ώστε το εμβαδόν της ωφέλιμης επιφάνειας να είναι μέγιστο (βλέπε σχήμα).



Α. Βοήθησε τον τυπογράφο του:

α) Να εκφράσει συναρτήσει των x και y το εμβαδόν Ε της ωφέλιμης επιφάνειας.
β) Ποια σχέση συνδέει τα x, y;
γ) Πως εκφράζεται το εμβαδόν Ε συναρτήσει του x;

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 10.160 - \frac{100.000}{x} - 16x, x > 0$. Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
Γ. Σύμφωνα με τα παραπάνω ποιες νομίζεις ότι πρέπει να είναι οι διαστάσεις x, y της αφίσας ώστε το εμβαδόν της ωφέλιμης επιφάνειας να είναι μέγιστο.

16. Σ' ένα καρτεσιανό επίπεδο θεωρούμε την ευθεία ε: y = x + 1 και τα σημεία Α(2,6) και Β(4,-2). Να βρείτε το σημείο Μ της ευθείας ε, για το οποίο το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετράγωνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΑ και ΜΒ, να είναι το ελάχιστο δυνατό.

17. Δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = α > 0 και πάνω σ' αυτό ένα σημείο Μ. Να βρείτε τη θέση του Μ, για την οποία το άθροισμα των όγκων των δύο σφαιρών ΜΑ και ΜΒ είναι το ελάχιστο δυνατό. ($V_{σφ} = \frac{4}{3}\pi R^3$).

18. Από όλα τα ορθογώνια τρίγωνα με την ίδια υποτείνουσα, πιο έχει το μεγαλύτερο εμβαδό;

19. Το κόστος παραγωγής x ραδιοφώνων σε μια μέρα είναι $K(x) = \frac{3}{4}x^2 + 105x + 75$ € και η τιμή πώλησης κάθε ραδιοφώνου είναι $T(x) = 150 - \frac{3}{2}x$ €. Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή ώστε να έχουμε το μέγιστο (συνολικό) κέρδος. Στην περίπτωση αυτή, να δείξετε ότι το μέσο κόστος της ημερήσιας παραγωγής είναι το ελάχιστο δυνατό.

20. Ένα σχοινί 1m είναι φτιαγμένο από υλικό μεταβλητής πυκνότητας. Όταν το σχοινί έχει μήκος x m τότε η μάζα του είναι $m = (1 + x)e^{x^2}$ kgr.
i. Να βρείτε την πυκνότητα της μάζας του (ρυθμός μεταβολής της μάζας) σε $^{kgr}/_{m}$ όταν x = 0,5m.
ii. Να βρείτε πότε η πυκνότητα της μάζας γίνεται ελάχιστη και πότε μέγιστη.

21. Να χωρίσετε τον αριθμό 8 σε δύο θετικούς προσθετέους, ώστε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού του γινομένου τους επί την διαφορά τους να είναι μέγιστο.

22. Να αποδείξετε ότι από όλους τους κυλίνδρους με την ίδια διάμετρο αυτός που έχει τη μεγαλύτερη χωρητικότητα είναι εκείνος στον οποίο ο λόγος της διαμέτρου της βάσης προς το ύψος ισούται με το $\sqrt{2}$. Με άλλα λόγια σε δεδομένη σφαίρα να γράψετε ένα κύλινδρο μεγίστου όγκου.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1^{ου} ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

1. Τα κέρδη μιας νέας επιχείρησης ως προς το χρόνο t σε έτη δίνονται από τη συνάρτηση $f(t) = \ln(t^2 + 9) – 2\ln 3$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρεθεί το $\lim_{t\to 0} f(t)$.

iii) Να βρεθεί η πρώτη και η δεύτερη παράγωγος της f.

iv) Να εκτιμηθεί σε πόσα χρόνια ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους της επιχείρησης θα γίνει μέγιστος.

2. Έστω f συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη για κάθε $x\in R$. Και για την πρώτη παράγωγο της f ισχύει : $(x^2+1)^2\cdot f'(x) = 5(\alpha - x^2)$, $\alpha\in R$.

Α1. Αν γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο σε σημείο με τετμημένη x = 2. Να αποδειχθεί ότι α = 4 .

Α2. Για την παραπάνω τιμή του α

α. Να αποδείξετε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(1, f(1)) είναι ίσος με $\frac{15}{4}$.

β. Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση f .

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x – \beta x + 3$ με $x\in R$ και $\alpha, \beta\in R$.

α. Να βρεθούν οι τιμές των α, β αν η C_f διέρχεται από το σημείο Α(0, 4) και η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι //x΄x .

β. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο Α.

γ. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία της και τα ακρότατα .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x} – \beta x$, $\alpha, \beta\in R$.

α) Να βρεθεί η τιμή του α ώστε $4f'(x) – 4\beta(x – 1) = 4f(x) + f''(x)$, για κάθε $x\in R$

β) Να βρείτε το β ώστε η εφαπτομένη της f στο σημείο (0, f(0)) να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x .

γ) Για τις τιμές των α, β που βρήκατε να μελετηθεί η f(x) ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2kx} + 1$, $x\in R$, $k\in R^*$.

i) Να βρεθούν οι τιμές της παραμέτρου k για τις οποίες ισχύει: $4f'(x) – f''(x) = 0$.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ε της C_f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$.

iii) Να βρεθεί η ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζει η παραπάνω εφαπτομένη με τους άξονες όταν k = 2.

6. Εταιρεία κατασκευής ηλεκτρονικών υπολογιστών χρησιμοποιεί ως μοντέλο πώλησης των προϊόντων της συναρτήσει του χρόνου τη σχέση $K(t) = \frac{80t}{t^2+4}$.

Όπου t ο χρόνος κυκλοφορίας του προϊόντος σε μήνες και K(t) το πλήθος των Η/Υ που πουλά στο αντίστοιχο χρόνο σε χιλιάδες μονάδες.

α. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής των πωλήσεων της εταιρείας μετά την πάροδο ενός μήνα από την κυκλοφορία κάποιου νέου μοντέλου Η/Υ της στην αγορά .

β. Να βρεθεί πότε οι πωλήσεις κάποιου νέου μοντέλου Η/Υ της εταιρείας μεγιστοποιούνται .

γ. Να βρεθεί η μέγιστη ποσότητα σε χιλιάδες μονάδες που πουλά η εταιρεία .

7. Οι ημερήσιες εισπράξεις ενός καταστήματος που λειτουργεί όλο το εικοσιτετράωρο, δίνονται σε χιλιάδες Ευρώ, από τις τιμές της συνάρτησης f με $f(t) = \frac{20t}{t^2+64}$, όπου ο χρόνος $t \in (0, 24)$ μετριέται σε ώρες και η μέτρηση του αρχίζει αμέσως μετά τις 12 το μεσημέρι.

α. Να βρείτε πότε το κατάστημα πραγματοποιεί τις περισσότερες εισπράξεις και πόσες είναι αυτές.

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής των εισπράξεων, τη χρονική στιγμή κατά την οποία η επιχείρηση πραγματοποιεί τις περισσότερες εισπράξεις, καθώς και το χρονικό διάστημα στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής είναι θετικός .

γ. Αν είναι γνωστό ότι το κατάστημα έχει κέρδος όταν οι εισπράξεις είναι τουλάχιστον χίλια Ευρώ, να βρείτε το χρονικό διάστημα στο οποίο η επιχείρηση είναι κερδοφόρα .

8. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, για την οποία ισχύει:

$$f^3(x) + f(x) = x^3 - e^{x-1},\ x \in R.$$

Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

9. Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης g στο σημείο Σ(2,0) σχηματίζει με τον άξονα xx΄ γωνία 60^o. Να υπολογίστε το $\lim_{h \to 0} \frac{g(2+h)}{h}$.

10. Έστω μία συνάρτηση f τέτοια ώστε: $f(2005 + h) - f(2005) = h^2 + 5h\ \forall h \in R$.

i) Αν f(2006) = 8, να προσδιορίσετε το f(2005).

ii) Να βρείτε την κλίση της C_f στο $x_0 = 2005$.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της C_f στο Α(2005,f(2005)).

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln x$, x > 0.

i) Να αποδείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει: $xf'(\frac{1}{x}) + f''(x) = 4$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(1,0) εφάπτεται της C_g με $g(x) = x^2 - \frac{3}{4}$, στο σημείο Β($\frac{1}{2}$,-$\frac{1}{2}$).

12. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha\sqrt{x^2 - x + 9} - 3\beta$ όπου $\alpha,\beta \in R$ και $g(x) = \sqrt{x} - 1$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

ii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = \frac{f}{g}$.

iii) Να βρείτε τις τιμές των α,β αν η γραφική παράσταση της h διέρχεται από την αρχή των αξόνων και από το σημείο Α(9,3).

iv) Αν α = β =1 να βρείτε το $\lim_{x\to 1} h(x)$.

v) Για α = β = 1 να εξετάσετε αν η συνάρτηση

$$K(x) = \begin{cases} h(x), & x \in [0,1)\cup(1,+\infty) \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$

είναι συνεχής για $x_0 = 1$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\kappa x} + \lambda x$ με $x, \kappa, \lambda \in R$.

i) Να βρείτε την f' και την f''.

ii) Να βρείτε την τιμή του κ ώστε να ισχύει: $f''(x) + 2f'(x) + e^{\kappa x} - 2\lambda = 0$.

iii) Για την τιμή του κ που βρέθηκε να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ(0,f(0)) να είναι παράλληλη στον άξονα xx΄.

iv) Για τις τιμές των κ και λ που βρέθηκαν να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

14. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-\alpha x}$ και $g(x) = \beta \ln x$ με $\alpha, \beta \in R$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού τους.

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του α η εφαπτομένη της C_f στο σημείο Α(0,f(0)) είναι παράλληλη στην ευθεία y = -x.

iii) Να βρείτε για ποια τιμή του β η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Β(1,g(1)) είναι παράλληλη στην διχοτόμο της δεύτερης γωνίας των αξόνων.

iv) Αν Α είναι το σημείο τομής της C_f με τον άξονα yy΄ και Β το σημείο τομής της C_g με τον άξονα xx΄ και α = 1, β = -1 να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο Α ταυτίζεται με την εφαπτομένη της C_g στο Β.

15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 + 4x - 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

ii) Να βρείτε το σημείο $A(x_0,f(x_0))$ της C_f στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης.

iii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης στο Α.

iv) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1} \frac{f(x) - 4}{2x^2 - 3x + 1}$.

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 - 3x^2 + x^3$.

i) Να βρείτε το σημείο Μ της C_f τέτοιο ώστε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο Μ να είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $3x + y - 4 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της (ε).

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)-f'(1)}{f(x)-f(1)}$.

iii) Για ποιες τιμές του $x\in R$ είναι $f'(x) \le 0$;

iv) Αν $g(x) = \ln f'(x)$, να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Α.

ii) Για ποιες τιμές του $x\in A$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx'.

iii) Να βρείτε τις τιμές του $\alpha\in R$ ώστε να ισχύει:

$$\alpha^2\frac{f'(x)}{f''(x)}-\alpha(e^x-1)f'(x)+6e^{f(x)}+\alpha=0;$$

iv) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = e^{2f(x)-1}$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

18. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = 2x^3 - \kappa x^2 + 6\lambda x + 4$ $x\in R$.

i) Να βρεθεί η $F'(x)$.

ii) Αν η F παρουσιάζει ακρότατο για $x = 1$ και $x = 2$ δείξτε ότι $\kappa = 9$ και $\lambda=2$.

iii) Αν $\kappa = 9$ και $\lambda = 2$ να μελετηθεί η F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της F στο σημείο $A(\lambda,F(\lambda))$. Για ποια τιμή του λ αυτός γίνεται ελάχιστος; Ποια η ελάχιστη τιμή του;

v) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\dfrac{F'(x)}{\sqrt{x^2+5}-3}$. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}h(x)$.

19. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \begin{cases} \kappa x^2 + \lambda x - 2, & x \neq 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \kappa x + \lambda, & x \neq 0 \\ 4, & x = 0 \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}, & x \in [0,3) \cup (3,+\infty) \\ \mu, & x = 3 \end{cases} \quad \text{με } \kappa, \lambda, \mu \in R.$$

i) Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε η h να είναι συνεχής στο $x_0 = 3$.
ii) Για την τιμή του μ που βρέθηκε είναι η h συνεχής στο πεδίο ορισμού της;
iii) Να βρεθούν οι κ και λ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_1 = 2$ και η g να είναι συνεχής στο $x_2 = 0$.
iv) Για τις τιμές των κ και λ να υπολογιστεί το όριο:

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(0)+f(x)-xg(x)+x+x^2-2f(2)}{x-1}.$$

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \dfrac{\ln x}{e^{x-1}} - \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να υπολογιστεί το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.
iii) Έχει νόημα να εξετάσουμε τη συνέχεια της f στο $x_0 = 5$;
iv) Να εξεταστεί η συνέχεια της f στο διάστημα (0,1).

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{2-\sqrt{x-1}}{x-5}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
ii) Να βρείτε το f(10).
iii) Υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$
iv) Βρείτε την $f'(x)$.
v) Βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο Α(10,f(10)).

22. Αν f(x) = ln(αx), g(x) = ln(βx), όπου $\alpha = \lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\sigma\upsilon\nu(x-1)\right]$ και

$\beta = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{4x^2-13x+3}{x-3}$ τότε:

i) Να υπολογίσεις τα α και β.
ii) Να δείξεις ότι η εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων f, g σ' ένα οποιοδήποτε x_0 του πεδίου ορισμού τους είναι ευθείες παράλληλες.
iii) Να εξετάσεις αν υπάρχει εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f που να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.